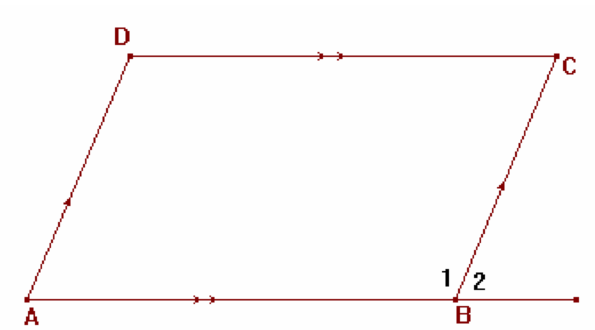
Uitwerkingen hoofdstuk 21 vwo B 1,2 deel 6

Bewijzen in de vlakke meetkunde

1.	1 is juist	2 is juist	3 is onjuist	4 is juist
	5 is juist	6 is onjuist	7 is juist	

2. $$\left.\begin{array}{l}\angle A_1 + \angle A_2 = 180° \Rightarrow \angle A_1 = 180° - \angle A_2 \\ \angle A_3 + \angle A_2 = 180° \Rightarrow \angle A_3 = 180° - \angle A_2\end{array}\right\} \Rightarrow \angle A_1 = \angle A_3$$

3.



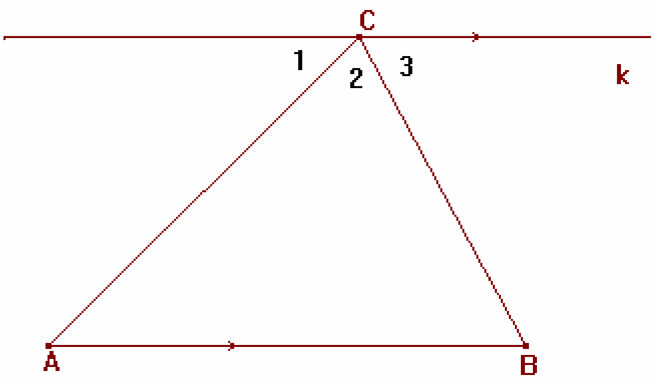
gegeven: ABCD is p.g.m.

te bew.
$\angle$ A = $\angle$ C
$\angle$ B = $\angle$ D

bewijs: Verleng zijde AB. $$\left.\begin{array}{l}\angle A = \angle B_2 (AD // BC) \\ \angle C = \angle B_2 (AB // CD)\end{array}\right\} \Rightarrow \angle A = \angle C$$

$$\left.\begin{array}{l}\angle B_1 + \angle A = 180° (U - figuur) \\ \angle D + \angle A = 180° (U - figuur)\end{array}\right\} \Rightarrow \angle B_1 = \angle D = \angle B$$

4.



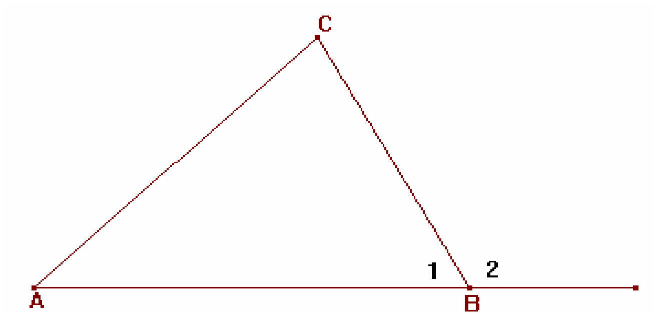
geg. Δ ABC

te bew. $\angle$A + $\angle$B + $\angle$ C = 180º

Bewijs:
Teken een lijn k door C // AB.

$$\left.\begin{array}{l}k // AB \Rightarrow \angle A = \angle C_1 (Z - hoeken) \\ k // AB \Rightarrow \angle B = \angle C_3 \\ \angle C_1 + \angle C_2 + \angle C_3 = 180° (gestrekte\ hoek)\end{array}\right\} \Rightarrow \angle A + \angle B + \angle C = 180°$$

5.

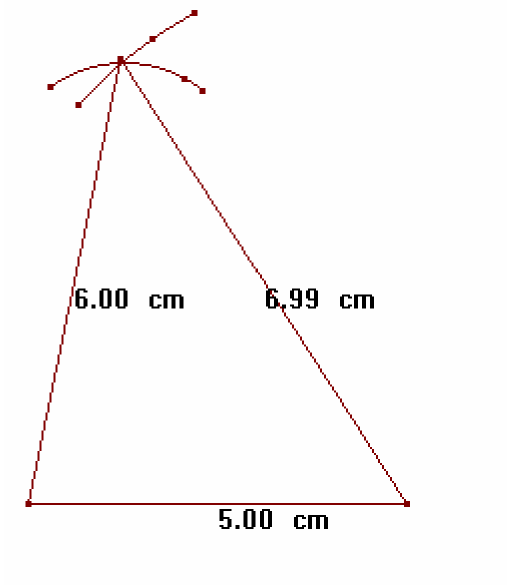


geg. Δ ABC met buitenhoek B_2

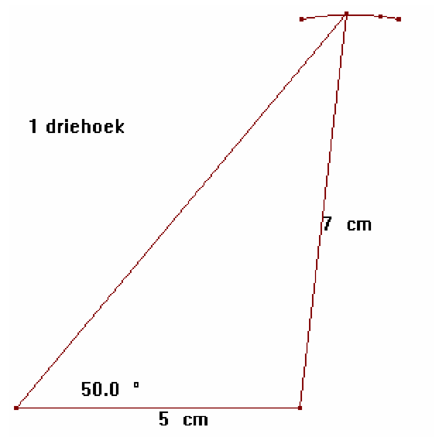
te bew. $\angle B_2 = \angle A + \angle C$

Bewijs: $$\left.\begin{array}{l}\angle A + \angle B_1 + \angle C = 180^\circ \\ \angle B_1 + \angle B_2 = 180^\circ (gestrekte\ hoek)\end{array}\right\} \Rightarrow \angle B_2 = \angle A + \angle C$$

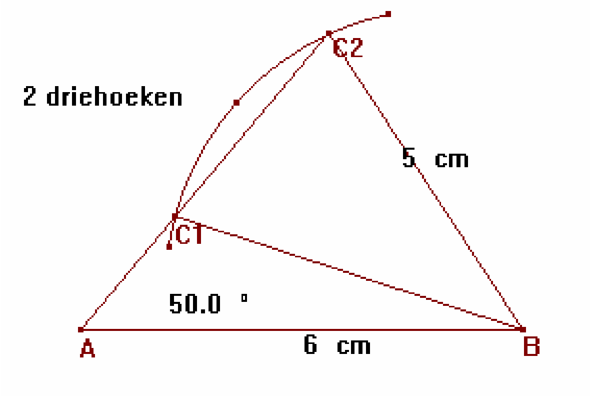
6. a.



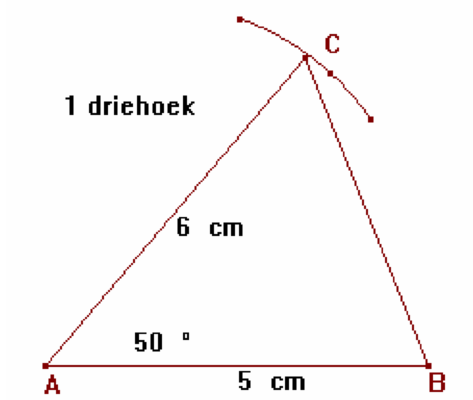
b.

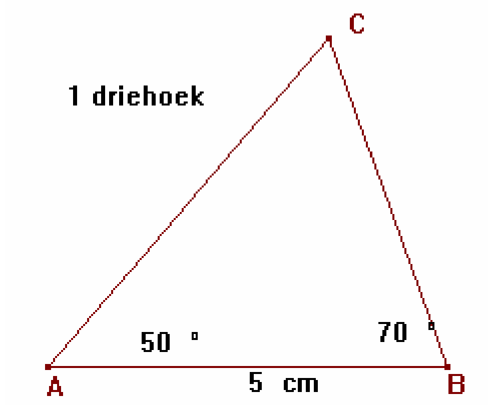


c



d.

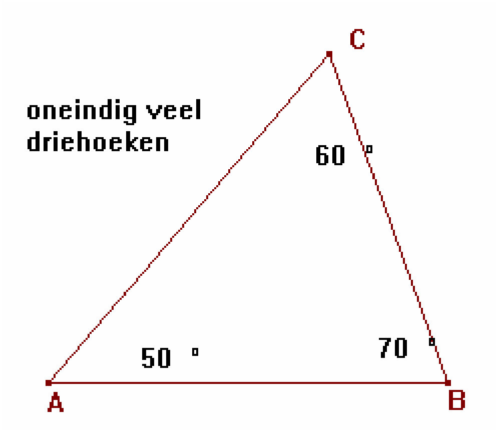


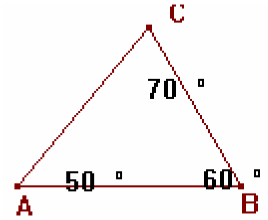


e. $\angle A = 180^\circ - 60^\circ - 70^\circ = 50^\circ$
zelfde driehoek als bij e.

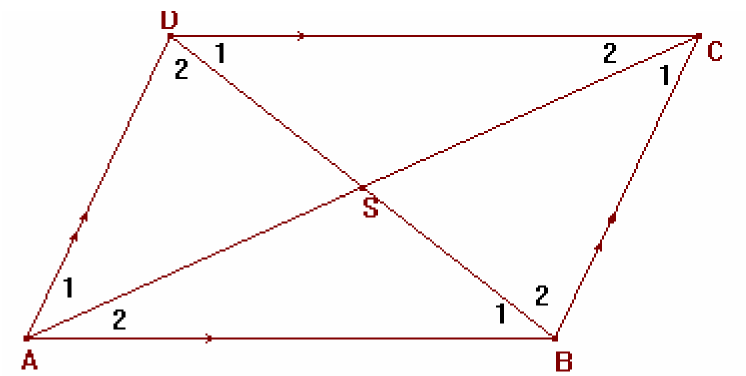
f.

g.





7a.

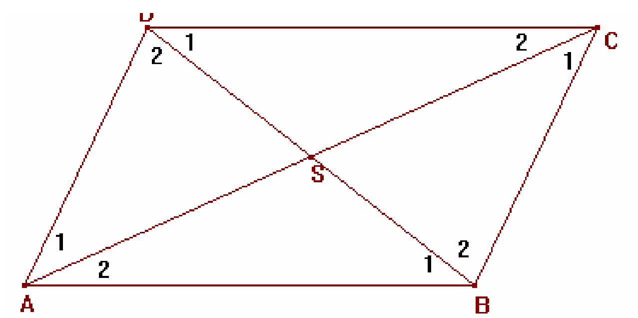


Geg. ABCD is een pgm

te bew. AS = CS en DS = BS

bewijs:

$$\left.\begin{array}{l}\angle A_2 = \angle C_2 (z-hoeken)\\ \angle B_1 = \angle D_1 (z-hoeken)\\ AB = CD(pgm)\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABS \cong \Delta CDS(hzh) \Rightarrow AS = CS \text{ en } BS = DS$$



b.

Gegeven: AS = SC en BS = DS

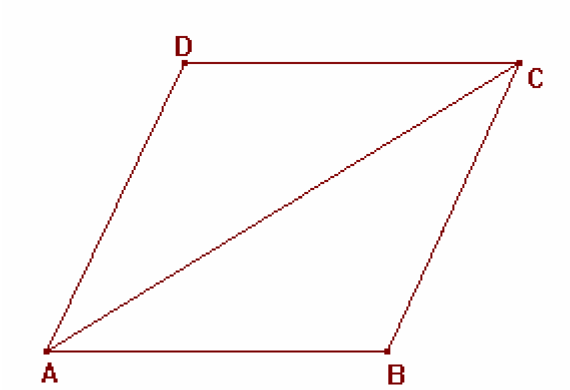
te bew. ABCD is pgm

bewijs: $\left.\begin{array}{l} AS = CS(geg) \\ BS = DS(geg) \\ \angle ASB = \angle DSC(overst.hoeken) \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABS \cong \Delta CDS(zhz) \Rightarrow \angle A_2 = \angle C_2 \Rightarrow AB // CD$

Evenzo : $\left.\begin{array}{l} AS = CS(geg) \\ DS = BS(geg) \\ \angle ASD = \angle BSC(overst.hoeken) \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ADS \cong \Delta CBS(zhz) \Rightarrow \angle A_1 = \angle C_1 \Rightarrow AD // BC$

Aangezien nu geldt : AB // CD en AD // CD $\Rightarrow$ ABCD is een pgm

8a.



gegeven : ABCD is een ruit

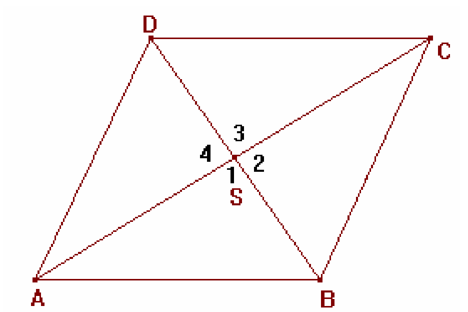
te bew. ABCD is een pgm

bewijs: Teken diagonaal AC $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} AB = CD(ruit) \\ BC = AD(ruit) \\ AC = AC \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta CDA(zzz) \Rightarrow \angle BAC = \angle DCA \Rightarrow AB // CD \\ \text{verder geldt ook } \angle ACB = \angle CAD \Rightarrow BC // AD \end{array}\right\} \Rightarrow$$

ABCD is een pgm

b.



gegeven : ABCD is een ruit

te bew. AC $\perp$ BD

bewijs:

ABCD is een ruit $\Rightarrow$ ABCD is ook dus een pgm $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}BS = DS(pgm)\\ AS = AS\\ AB = AD(ruit)\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABS \cong \Delta ADS \Rightarrow \angle S_1 = \angle S_4\\ \angle S_1 + \angle S_4 = 180°(gestrekte\ hoek)\end{array}\right\} \Rightarrow \angle S_1 = 90° \Rightarrow \text{ AC} \perp \text{BD}$$

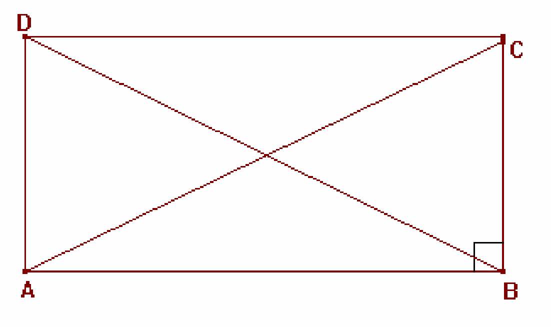
8c. Zie de figuur bij 8b. gegeven : ABCD is een ruit

te bew.: AC en BD zijn deellijnen

Bewijs:Zie 8b: uit de congruentie volgt verder dat ∠ BAS = ∠ DAS ⇒ AC is deellijn

verder geldt: $\left.\begin{array}{l}AS = CS(pgm)\\ BS = BS\\ AB = BC(ruit)\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABS \cong \Delta CBS \Rightarrow \angle ABS = \angle CBS$ ⇒ BD is ook deellijn.

9.



geg. ABCD is een rechthoek

te bew. AC = BD

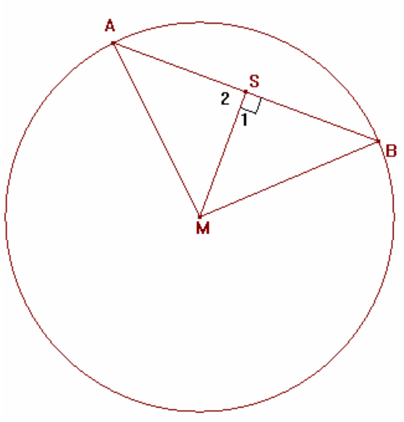
Bewijs: Iedere hoek is 90º ⇒ ∠ A + ∠B = 180º ⇒ AD // BC
Zo geldt ook : ∠ A + ∠ D = 180º ⇒ AB // CD
Uit de evenwijdigheid volgt : ABCD is een pgm ⇒

$\left.\begin{array}{l}AD = BC(pgm)\\ \angle DAB = \angle CBA(90°)\\ AB = AB\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABD \cong \Delta BAC(zhz)$ ⇒ BD=AC

10 geg. ABCD is een vierkant te bew. ABCD is een ruit met rechte hoeken

Bewijs: Een vierkant heeft 4 rechte hoeken ⇒ ABCD is ook een rechthoek
Aangezien een vierkant ook gelijke zijden heeft volgt hier dus ook uit dat ABCD ook een ruit is. Dus geldt: ABCD is een ruit met rechte hoeken.

11.



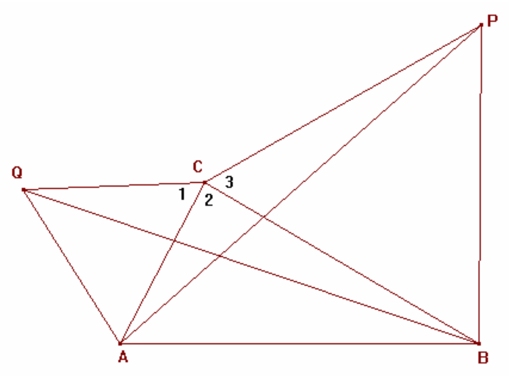
gegeven : cirkel met m.p. M
AS ⊥ AB

te bew. AS = BS

Bewijs: Teken de stralen BM en AM ⇒

$$\left.\begin{array}{l} AM = BM\,(straal) \\ MS = MS \\ \angle S_2 = \angle S_1 (90°) \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta AMS \cong \Delta BMS \quad \Rightarrow \text{AS = BS}$$

12.



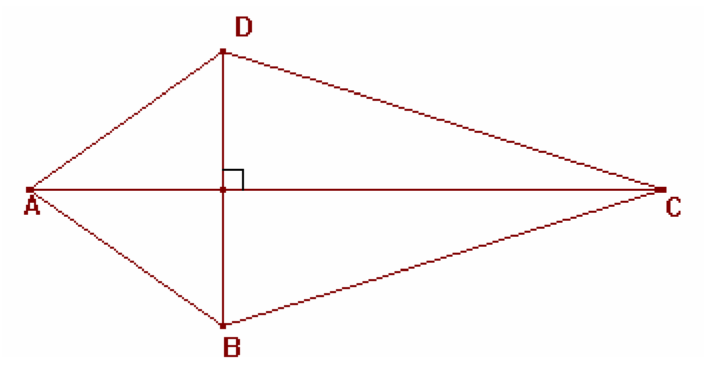
Gegeven: Δ ABC
Δ ACQ en Δ BCP zijn gelijkzijdig.

te bew. AP = BQ

Bewijs:

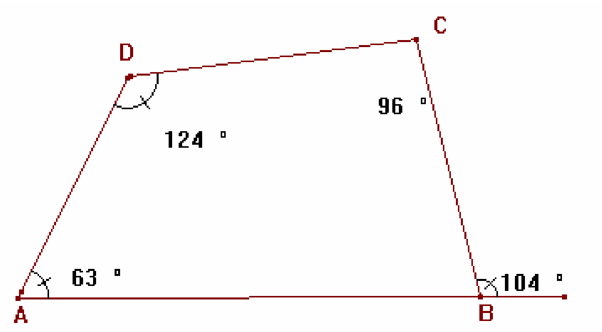
$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \angle C_1 = 60°(gelijkzijdig) \\ \angle C_3 = 60°(gelijkzijdig) \end{array}\right\} \Rightarrow \angle C_1 = \angle C_3 \\ QC = AC(gelijkzijdig) \\ PC = BC(gelijkzijdig) \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ACP \cong \Delta QCB(zhz) \Rightarrow AP = QB$$

13.



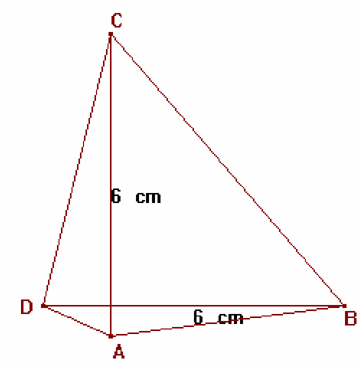
De diagonalen staan loodrecht op elkaar , maar ABCD is geen ruit , maar wel een vlieger.

14.



$\frac{1}{3}.(63+124+96) \approx 94° \neq 104°$

15.



a. Niet omkeerbaar. Tegenvoorbeeld:
Zie de figuur: AC = BD = 6 , maar ABCD is duidelijk geen rechthoek.

b. Deze stelling is omkeerbaar.
Als de diagonalen van een vierhoek elkaar middendoor delen, dan is de vierhoek een pgm.

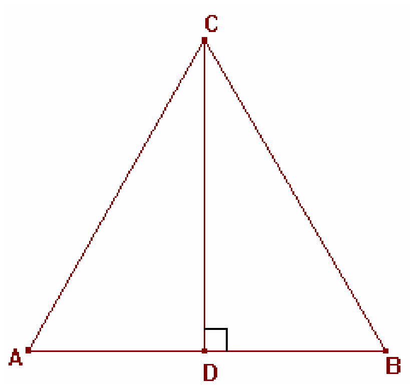
c. Ook omkeerbaar:
Als geldt: $AB^2 + AC^2 = BC^2$ dan is driehoek ABC rechthoekig met $\angle$ A = 90º.

d. Niet omkeerbaar . Tegenvoorbeeld: zie de vlieger bij opgave 13.

16.

geg. Δ ABC met AC = BC

te bew. $\angle$ A = $\angle$ B

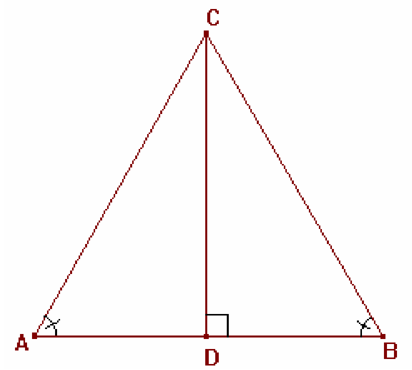


a. Teken CD ⊥ AB.

b. $$\left.\begin{array}{l} AC = BC(geg) \\ CD = CD \\ \angle ADC = \angle BDC(90°) \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ADC \cong \Delta BDC \text{ (zzr)} \Rightarrow$$

c. $\Rightarrow \angle A = \angle B$

17.



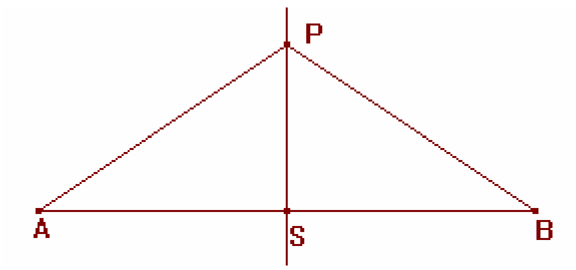
geg. $\angle A = \angle B$

te bew. AC = BC

Bewijs: Teken lijnstuk CD $\perp$ AB. $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \angle A = \angle B (geg) \\ CD = CD \\ \angle ADC = \angle BDC (90°) \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ADC \cong \Delta BDC \quad \Rightarrow \text{AC = BC}$$

18a.

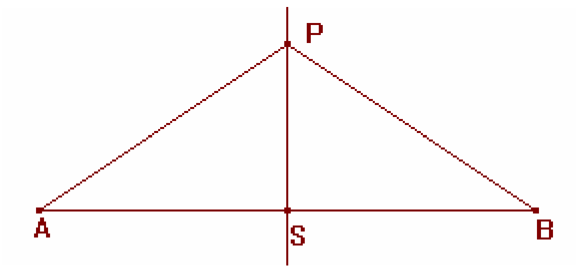


geg. AS = BS en PS $\perp$ AB

te bew. AP = BP

$$\text{Bewijs: } \left.\begin{array}{l} AS = BS (mll) \\ \angle PSA = \angle PSB (mll) \\ PS = PS \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ASP \cong \Delta BSP \text{ (zhz) } \Rightarrow \text{AP = BP}$$

b.



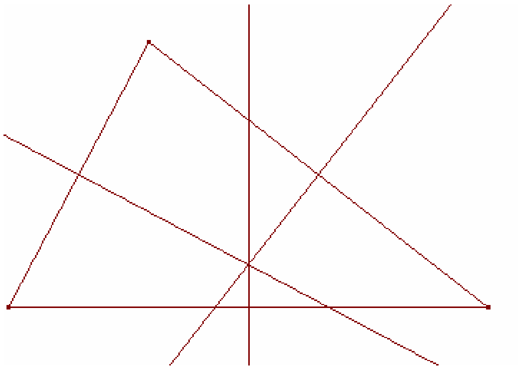
geg. AP = BP

te bew. P op mll van AB

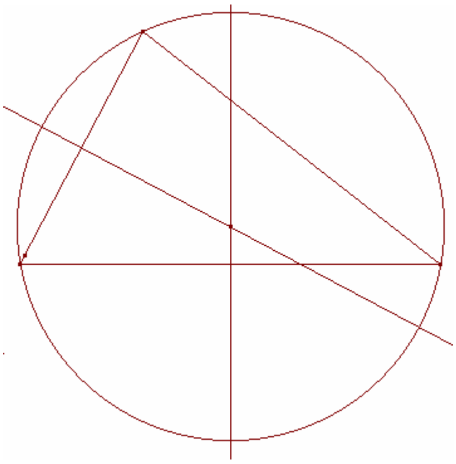
Bewijs: Teken de lijn door P $\perp$ AB $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} AP = BP (geg) \\ \angle PSA = \angle PSB (90°) \\ PS = PS \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ASP \cong \Delta BSP \text{ (zzr) } \Rightarrow \text{AS = BS en PS} \perp \text{AB} \Rightarrow \text{Pop mll van AB}$$

19a. De drie mll van deze driehoek gaan door één punt.

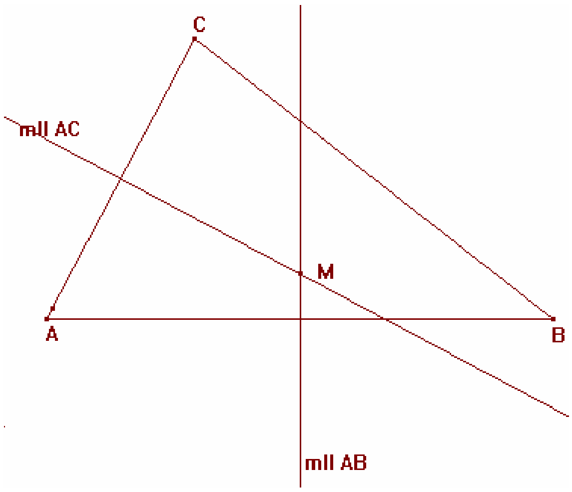


b. De cirkel met mp het snijpunt van de 2 mll. is de omgeschreven cirkel van de driehoek.
De cirkel gaat dus ook door de twee andere hoekpunten.



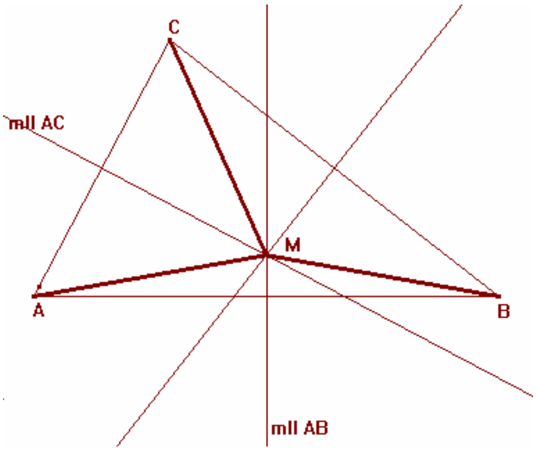
20a. Gegeven: Δ ABC en de 3 mll.
te bew. de 3 mll gaan door één punt

b.



Bewijs: $\left.\begin{array}{l} M\ \ op\ mll_{AB} \ \Rightarrow MA = MB \\ M\ \ op\ mll_{AC} \ \Rightarrow MA = MC \end{array}\right\} \Rightarrow MB = MC$ $\Rightarrow$ M ook op mll van BC $\Rightarrow$ De drie mll van Δ ABC gaan door één punt.

21.



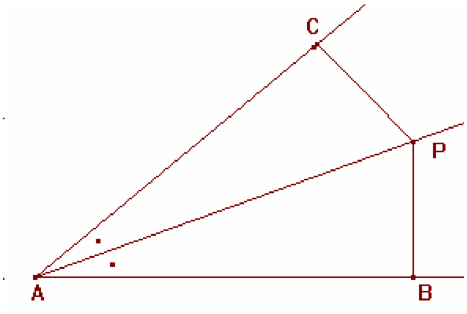
Gegeven : Δ ABC en de drie mll met snijpunt M.

Te bew. M is m.p. van de omgeschreven cirkel van Δ ABC

Bewijs: $\left.\begin{array}{l} M \ \ op \ mll_{AB} \ \ \Rightarrow MA = MB \\ M \ \ op \ mll_{AC} \ \ \Rightarrow MA = MC \end{array}\right\} \Rightarrow MA = MB = MC$ ⇒ M is het m.p. van de cirkel door A , B en C . ⇒ M is het middelpunt van de omgeschreven cirkel ban Δ ABC.

22.

a.



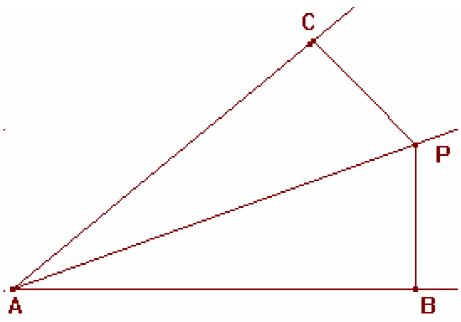
Geg. ∠ CAB en deellijn AP

Te bew. CP = BP

Bewijs: Teken de lijnstukken CP en BP loodrecht op AC en AB. ⇒

$\left.\begin{array}{l} \angle ACP = \angle ABP(90°) \\ AP = AP \\ \angle CAP = \angle BAP(deellijn) \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ACP \cong \Delta ABP$ (zhh) ⇒ CP = BP ⇒ P heeft gelijke afstanden tot de benen AB en AC.

b.



Gegeven: CP = BP

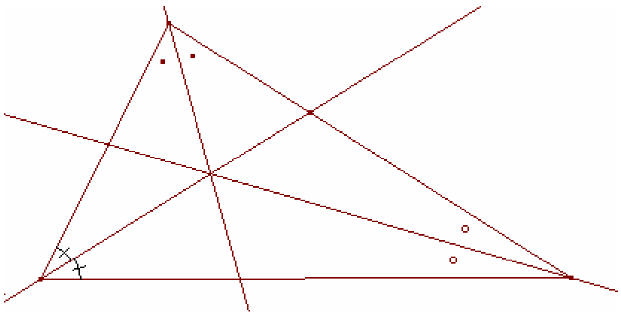
Te bew. ∠ CAP = ∠ BAP

Bewijs. Teken de afstanden CP en BP loodrecht op AC en AB. ⇒

$$\left.\begin{array}{l} CP = BP(geg) \\ \angle ACP = \angle ABP(90^\circ) \\ AP = AP \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABP \cong \Delta ACP \text{ (zzr)} \Rightarrow \angle \text{ CAP} = \angle \text{ BAP} \Rightarrow \text{AP is deellijn van } \angle \text{ A} \Rightarrow$$

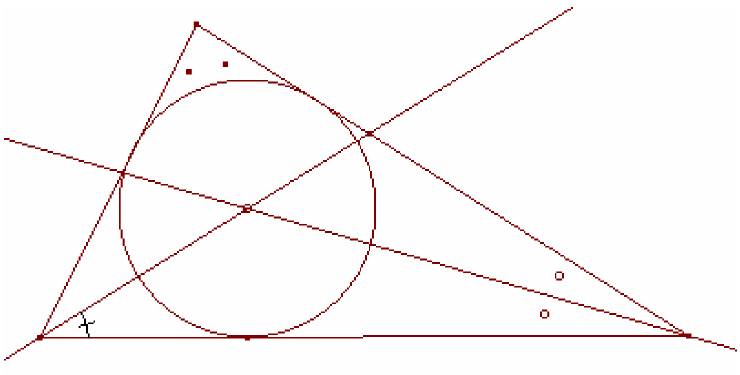
P ligt op de deellijn of bissectrice van ∠ A.

23a.



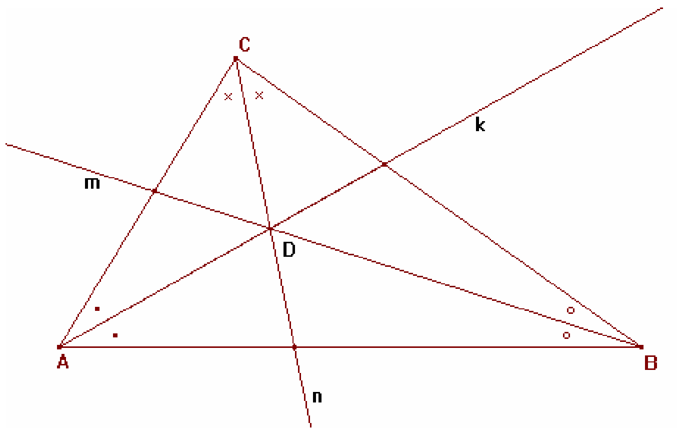
De drie deellijnen van een driehoek gaan door één punt.

b.



De cirkel met mp het snijpunt van twee deellijnen raakt ook de twee andere zijden van de driehoek.

24.



Gegeven Δ ABC met de drie deellijnen k , m en n.

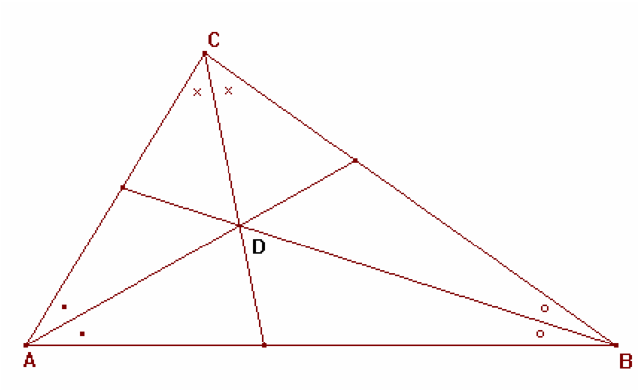
te bew.   k , m en n door één punt

Bewijs: De deellijnen k en m snijden elkaar in D ⇒

$$\left.\begin{array}{l} \text{D op k dus d(D,AC) = d(D,AB)} \\ \text{D op m dus d(D,BC) = d(D,AB)} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{d(D,AC) = d (D,BC)} \quad \Rightarrow \text{ook D ligt op de deellijn van}$$

∠ C en dus ook op n ⇒ de drie deellijnen k , m en n gaan door één punt.

25.



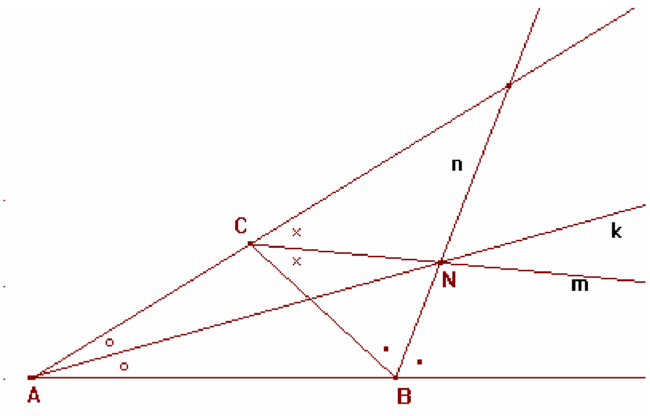
Gegeven Δ ABC en de 3 deellijnen die door punt D gaan.

te bew.
D is het middelpunt van de ingeschreven cirkel

Bewijs: $$\left.\begin{array}{l}\text{D op bissectrice van hoek A} \Rightarrow d(D,AB) = d(D,AC) \\ \text{D op bissectrice van hoek B} \Rightarrow d(D,AB) = d(D,BC)\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ d(D,AB) = d (D,AC) = d (D , BC) $\Rightarrow$ D is dus het middelpunt van de ingeschreven cirkel van driehoek ABC.

26.



geg. Δ ABC met bissectrice k van ∠ A en de buitenbissectrices m en n van de hoeken B en C.

te bew.
De lijnen k , m en n gaan door één punt

Bewijs: $$\left.\begin{array}{l}\text{N op bissectrice van hoek A} \Rightarrow d(N,AB) = d(N,AC) \\ \text{N op bissectrice van hoek B} \Rightarrow d(N,AB) = d(N,BC)\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ d(N,AC) = d(N,BC) $\Rightarrow$ N ook op bissectrice van ∠ C $\Rightarrow$ de drie deellijnen k , m en n gaan door éé n punt.

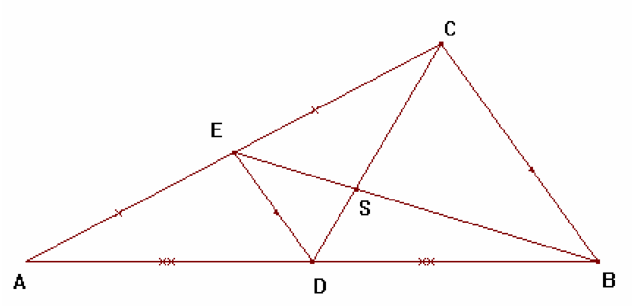
27.

a. $$\left.\begin{array}{l}\text{D is midden van AB dus AD = DB} \Rightarrow AB = 2.AD \\ \text{E is midden van AC dus AE = EC} \Rightarrow AC = 2.AE\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta\ \text{ABC is een vergroting met}$$

factor 2 t.o.v. Δ ADE.

b. Δ ABC is een vergroting van Δ ADE $\Rightarrow$ de hoeken blijven gelijk $\Rightarrow$ ∠ADE = ∠ABC $\Rightarrow$ DE // BC (F-hoeken)

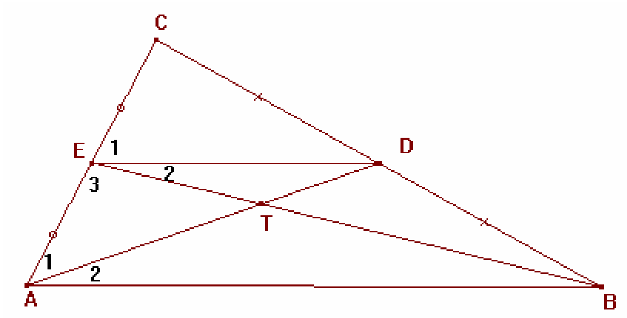
c. te berekenen: DS : CS



Berekening: Aangezien DE // BC geldt dat deze figuur een zandloperfiguur is. De vergroting van DE naar BC is 2 dus dat geldt ook voor de lijnstukken DS en ES naar CS en BS
(Δ BSC is ook een vergroting van Δ ESD met factor 2) ⇒
DS : CS = ES : BS = DE : BC = 1 : 2

28 Gegeven: ΔABC met zwaartelijnen AD en BE

te bew. AT : DT = 2 : 1



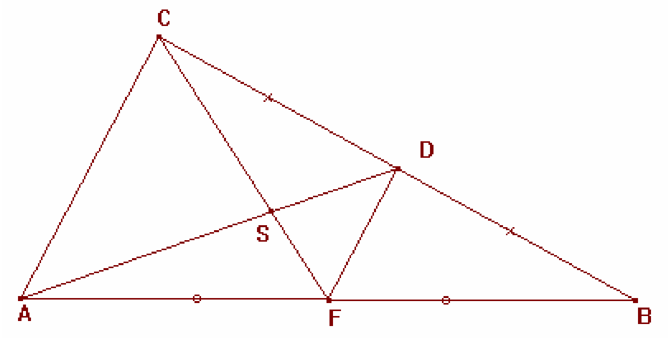
Bewijs: $\left.\begin{array}{l} AC = 2.CE \\ BC = 2.CD \\ \angle C = \angle C \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta EDC(zhz)$ ⇒ AC : EC = AB : ED = 2 : 1 Uit de gelijkvormigheid volgt ook : $\angle A_{12} = \angle E_1$ ⇒ AB // DE ⇒

$\left.\begin{array}{l} \angle E_2 = \angle ABT \\ \angle ETD = \angle ATB \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ETD \sim \Delta BTA(hh)$ ⇒ AB : DE = AT : DT = 2 : 1

b. Uit dezelfde gelijkvormigheid volgt ook AB : DE = BT : ET

Nu nieuwe figuur: Gegeven: De twee zwaartelijnen AD en CF

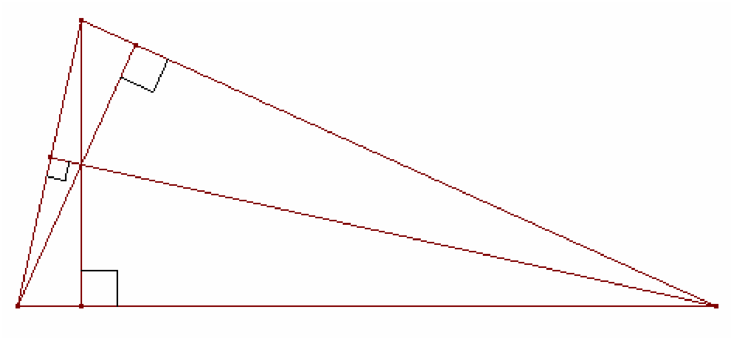
te bew. de 3 zwaartelijnen verdelen elkaar in stukken met verhouding 2 : 1



Bewijs: Op dezelfde manier als in 28a geldt dat Δ ASC ~ Δ DSF . Aangezien evenzo geldt dat AC : DF = 2 : 1 ⇒ AS : DS = CS : FS = 2 : 1
We hebben al eerder gezien in 28a dat geldt: AB : DE = 2 : 1 ⇒ AT : DT = BT : ET = 2 : 1

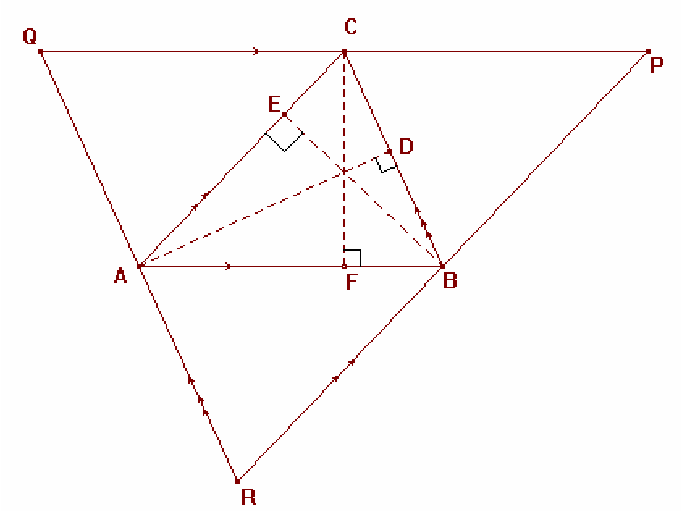
Uit deze twee regels volgt dus dat de punten T en S samenvallen ⇒ de drie zwaartelijnen verdelen elkaar in stukken van 2 : 1 en snijden elkaar in één punt.

29.



Vermoeden:
De drie hoogtelijnen snijden elkaar in één punt.

30. a en b.



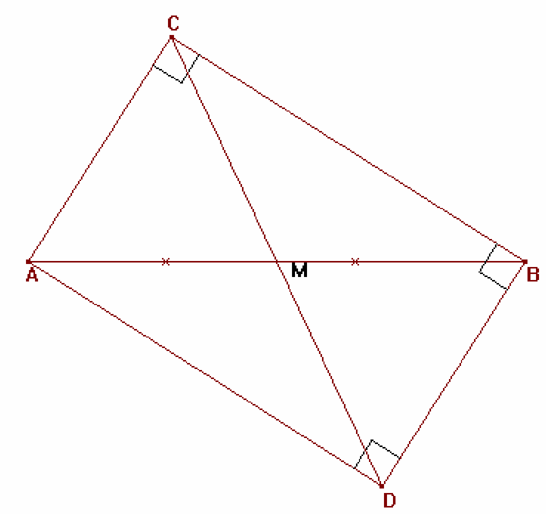
Gegeven Δ ABC ; AB // PQ
BC // QR ; AC // PR en de drie hoogtelijnen van Δ ABC

te bew. de drie hoogtelijnen gaan door één punt

Bewijs: Aangezien PQ // AB en QR // BC en AC // PR ⇒ ABPC ; ABCQ en ARBC zijn pgm. ⇒ QC = AB en CP = AB ⇒ QC = CP Zo geldt ook dat RB = PB en QA = RA
Verder geldt dat CF is een hoogtelijn ⇒ CF ⊥ AB Je weet dat AB // PQ ⇒ CF ⊥ PQ Nu weet je dus dat QC = PC en CF ⊥ QP ⇒ CF is mll van PQ.
Zo zijn ook AD en BE mll. van QR en PR .
De drie hoogtelijnen van Δ ABC zijn dus ook de drie mll. van Δ PQR. De drie mll. gaan door één punt ⇒ de drie hoogtelijnen van Δ ABC gaan dus ook door één punt.

31a.

Gegeven: Δ ABC en ∠ C = 90º en AM = BM



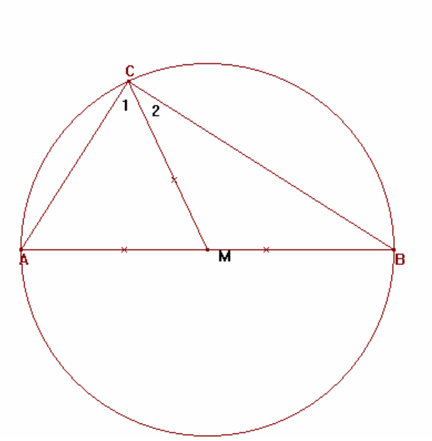
Te bew. AM = BM = CM

Bewijs: Teken vanuit Δ ABC nu de rechthoek ADBC met de diagonalen AB en CD. ⇒

$$\left.\begin{array}{l} CD = AB \\ AM = BM \\ ABCD \text{ is rechthoek en dus ook een pgm} \end{array}\right\} \Rightarrow CM = AM = BM$$

b.

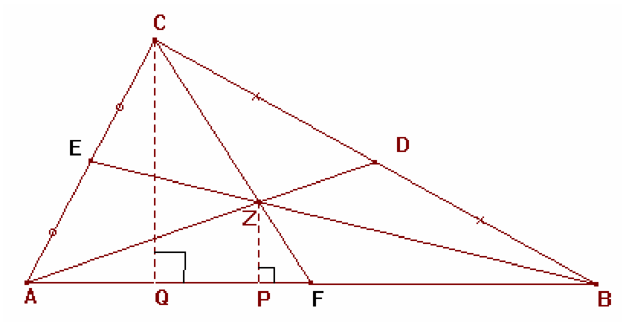
Gegeven : Δ ABC en omgeschreven cirkel met middellijn AB met AM = BM .



Te bew. ∠ ACB = 90º

$$\text{Bewijs: } \left.\begin{array}{l} \angle A + \angle B + \angle C_{12} = 180^\circ \\ AM = CM \;\Rightarrow\; \angle A = \angle C_1 \\ BM = CM \;\Rightarrow\; \angle B = \angle C_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \angle C_1 + \angle C_2 + \angle C_{12} = 180^\circ \Rightarrow 2.\angle C_{12} = 180^\circ \Rightarrow \angle C_{12} = 90^\circ$$

32a.



Gegeven : Δ ABC met de 3 zwaartelijnen.

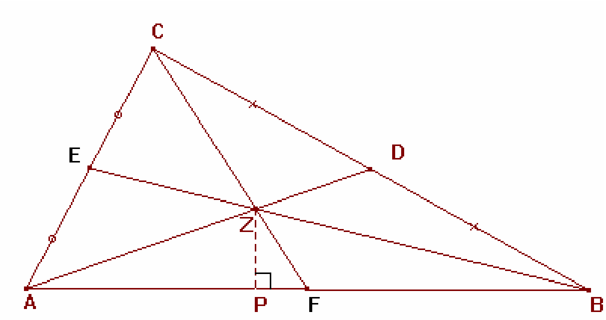
Te bew. O(Δ ABC) = 3 . O(Δ ABZ)

Bewijs: Teken de hoogtelijnen CQ en ZP. ⇒

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\angle QFC = \angle PFZ \\ \angle Q = \angle P(90°)\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta QFC \sim \Delta PFZ(hh) \Rightarrow CQ:ZP=FC:FZ \\ CZ:ZF=2:1(\text{zwaartelijn}) \Rightarrow CF:ZF=3:1\end{array}\right\} \Rightarrow CQ : ZP = 3 : 1 \Rightarrow CQ = 3.ZP$$

$$\left.\begin{array}{l}O(\Delta ABC) = 0,5.AB.CQ \\ O(\Delta ABZ) = 0,5.AB.PZ \\ CQ = 3.PZ(bewezen)\end{array}\right\} \Rightarrow O(\Delta\ ABC) = 3.O(\Delta\ ABZ)$$

32b.



Vermoeden:

O(Δ ABC) = 3 . O(AFZE)

Gegeven: Δ ABC met de 3 zwaartelijnen met snijpunt Z.

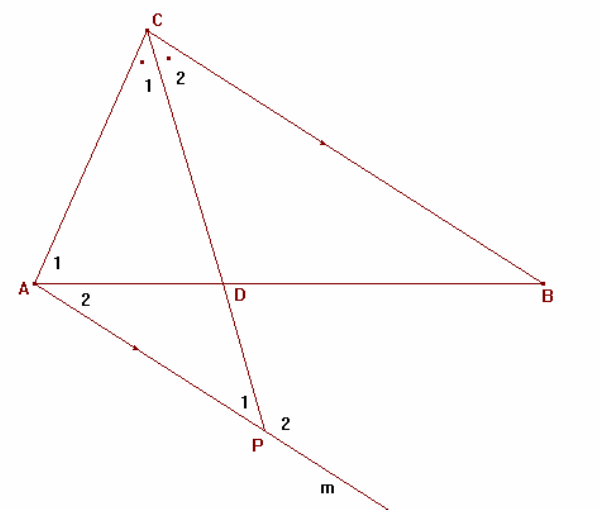
te bew. O(AFZE) = $\frac{1}{3}$.O(Δ ABC)

Bewijs: Teken lijnstuk ZP ⊥ AB . ⇒

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}AF = 0,5AB \\ O(\Delta AFZ) = 0,5.AF.ZP\end{array}\right\} \Rightarrow O(\Delta AFZ) = 0,5.0,5.AB.ZP \\ O(\Delta ABZ) = 0,5.AB.ZP\end{array}\right\} \Rightarrow O(\Delta AFZ) = 0,5.O(\Delta ABZ)$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}O(\Delta AFZ) = 0,5.O(\Delta ABZ) \\ O(\Delta ABZ) = \frac{1}{3}.O(\Delta ABC)(onderdeel\ a)\end{array}\right\} \Rightarrow O(\Delta AFZ) = \frac{1}{6}.O(\Delta ABC) \\ Op\ dezelfde\ manier\ geldt:\ O(\Delta AEZ) = \frac{1}{6}.O(\Delta ABC)\end{array}\right\} \Rightarrow O(AFZE) = \frac{1}{3}.O(\Delta ABC)$$

33.



Gegeven Δ ABC met deellijn van ∠ C.

Te bew. AD : BD = AC : BC

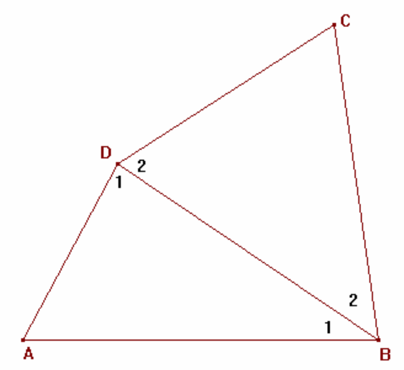
Bewijs: Teken hulplijn m door A // BC en verleng deellijn uit C ⇒ snijpunt P.

$$\left.\begin{array}{l}\angle P_1 = \angle C_2 (Z-hoek)\\ \angle A_2 = \angle B (z-hoek)\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta\ APD \sim \Delta\ BCD\ (hh) \Rightarrow AD : BD = AP : BC$$

$$\left.\begin{array}{l}\angle P_1 = \angle C_2 (z-hoek)\\ \angle C_1 = \angle C_2 (deellijn)\end{array}\right\} \Rightarrow \angle P_1 = \angle C_1 \Rightarrow \Delta APC \text{ is gelijkbenig} \Rightarrow AP = AC.$$

Uit bovenstaande volgt dus : AD : BD = AC : BC

34.



Gegeven: vierhoek ABCD

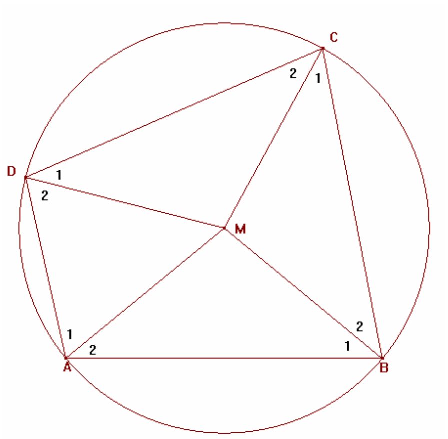
Te bew. $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$

Bewijs: Trek de diagonaal BD $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l}\angle A + \angle B_1 + \angle D_1 = 180^\circ\\ \angle C + \angle B_2 + \angle D_2 = 180^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \angle A + \angle B_1 + \angle D_1 + \angle C + \angle B_2 + \angle D_2 = 360^\circ \Rightarrow$$

$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$

35.



Gegeven :
vierhoek ABCD met de hoekpunten op een cirkel en middelpunt binnen ABCD

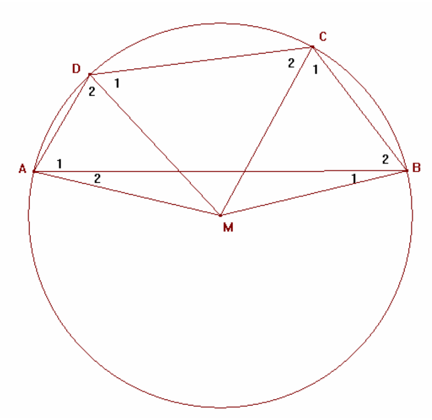
Te bew. $\angle A + \angle C = 180^\circ$ en $\angle B + \angle D = 180^\circ$

Teken de 4 lijnstukken naar A,B,C en D vanuit M. $\Rightarrow$ 4 gelijkbenige driehoeken $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\angle A_2 = \angle B_1\\ \angle C_1 = \angle B_2\\ \angle C_2 = \angle D_1\\ \angle A_1 = \angle D_2\end{array}\right\} \Rightarrow \angle A_2 + \angle A_1 + \angle C_1 + \angle C_2 = \angle B_1 + \angle B_2 + \angle D_1 + \angle D_2\\ \angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\angle A + \angle C = 180^\circ$ en $\angle B + \angle D = 180^\circ$

b.



Gegeven:
vierhoek ABCD met de hoekpunten op een cirkel en middelpunt buiten ABCD

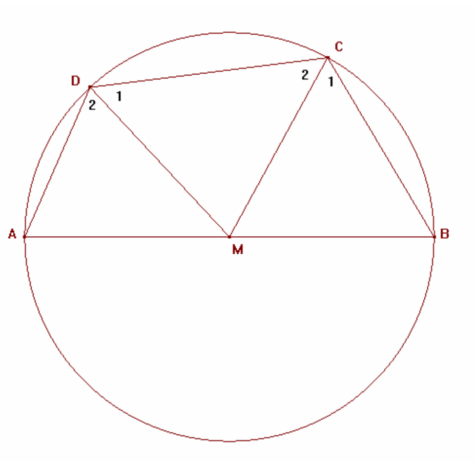
Te bew: $\angle A + \angle C = 180^\circ$ en $\angle B + \angle D = 180^\circ$

Teken weer de 4 lijnstukken ⇒ er ontstaan weer 4 gelijkbenige driehoeken. ⇒

$$\left.\begin{array}{l}\angle A_{12} = \angle D_2 \\ \angle C_2 = \angle D_1 \\ \angle C_1 = \angle B_{12} \\ \angle A_2 = \angle B_1\end{array}\right\} \Rightarrow \angle A_{12} + \angle C_2 + \angle C_1 - \angle A_2 = \angle D_2 + \angle D_1 + \angle B_{12} - \angle B_1 \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\angle A_1 + \angle C_{12} = \angle B_2 + \angle D_{12} \\ \angle A_1 + \angle B_2 + \angle C_{12} + \angle D_{12} = 360^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \angle A_1 + \angle C_{12} = 180^\circ \text{ en } \angle B_2 + \angle D_{12} = 180^\circ$$

c.



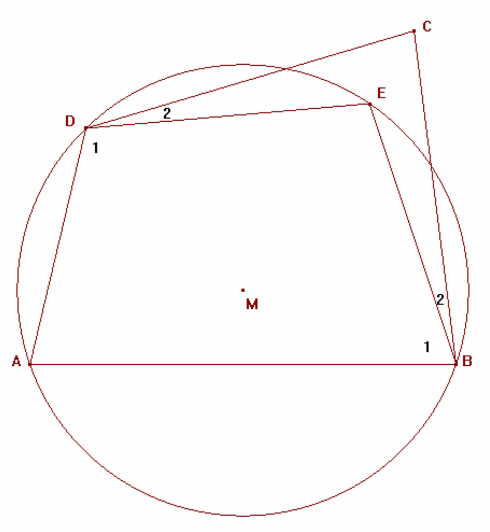
Gegeven: vierhoek ABCD met de hoekpunten op een cirkel en middelpunt M op een zijde van ABCD.

Te bew: $\angle A + \angle C = 180^\circ$ en $\angle B + \angle D = 180^\circ$

Bew. Teken DM en MC ⇒ $\left.\begin{array}{l}\angle A = \angle D_2 \\ \angle C_2 = \angle D_1 \\ \angle C_1 = \angle B\end{array}\right\} \Rightarrow \angle A + \angle C_2 + \angle C_1 = \angle D_2 + \angle D_1 + \angle B \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l}\angle A + \angle C = \angle B + \angle D \\ \angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \angle A + \angle C = 180^\circ \text{ en } \angle B + \angle D = 180^\circ$$

36

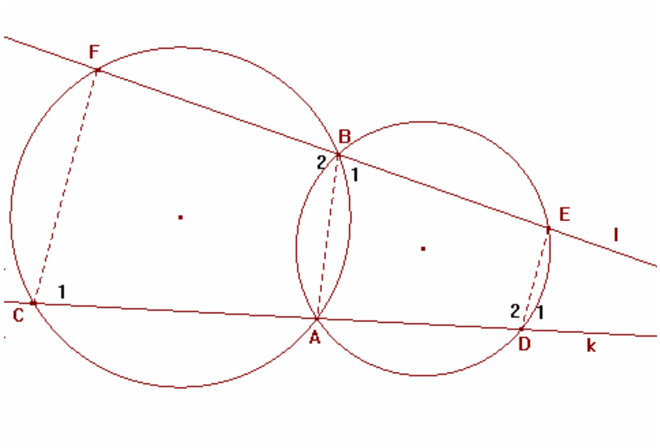


Gegeven: vierhoek ABCD met A , B en D op de cirkel en C buiten de cirkel.

Te bew. $\angle A + \angle C < 180^o$

Bewijs: $$\left.\begin{array}{l}\angle B_1+\angle D_1=180°(koordenvierhoek)\Rightarrow \angle B_{12}+\angle D_{12}>180° \\ \angle A+\angle B_{12}+\angle C+\angle D_{12}=360°\end{array}\right\}\Rightarrow \angle A+\angle C<180^o$$

37.



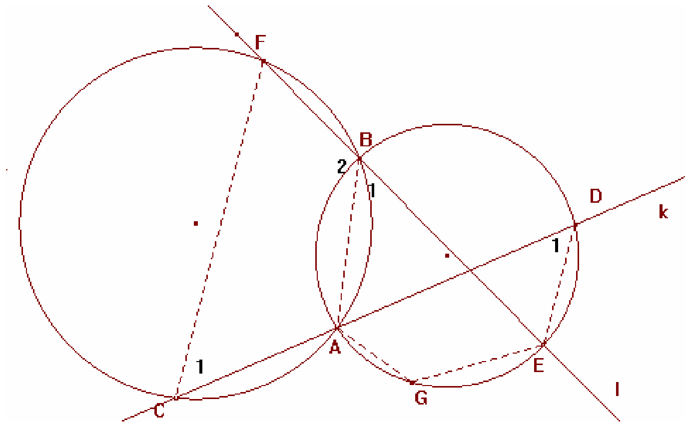
Gegeven: 2 cirkels met snijpunten A en B . De lijnen k en l door de punten A en B. Snijpunten zijn verder C , D , E en F.

Te bew. CF // DE

Bewijs: $$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\angle C_1+\angle B_2=180°(koordenvierhoek) \\ \angle B_1+\angle B_2=180°(gestrekte\ hoek)\end{array}\right\}\Rightarrow \angle C_1=\angle B_1 \\ \left.\begin{array}{l}\angle B_1+\angle D_2=180°(koordenvierhoek) \\ \angle D_1+\angle D_2=180°(gestrekte\ hoek)\end{array}\right\}\Rightarrow \angle D_1=\angle B_1\end{array}\right\}\Rightarrow \angle C_1=\angle D_1\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ CF // DE (F-hoeken)

38a.



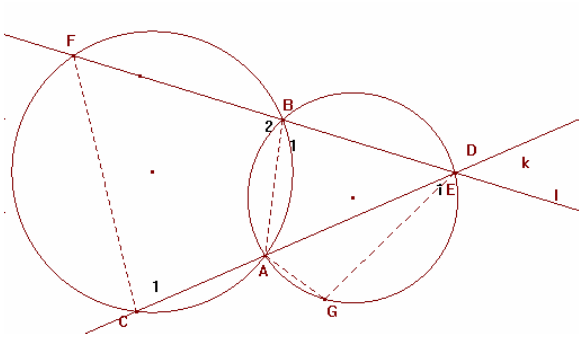
Gegeven: 2 cirkels met snijpunten A en B . De lijnen k en l door de punten A en B. Snijpunten zijn verder C , D , E en F. Punt E ligt tussen A en D.

Te bew. DE // CF

Bewijs: Teken een punt G op de cirkel tussen A en E en teken verder de gestippelde lijnstukken. $\Rightarrow$

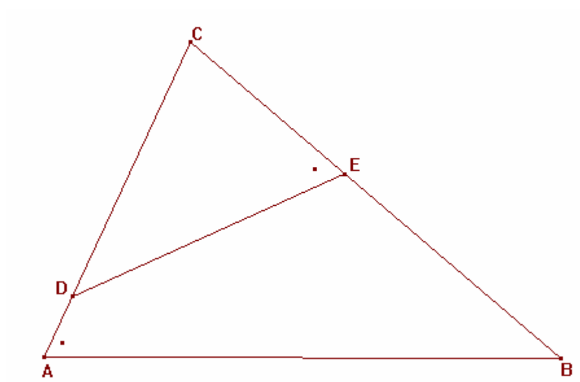
$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\angle C_1 + \angle B_2 = 180^\circ (koordenvierhoek) \\ \angle B_1 + \angle B_2 = 180^\circ (gestrekte\ hoek)\end{array}\right\} \Rightarrow \angle C_1 = \angle B_1 \\ \left.\begin{array}{l}\angle B_1 + \angle AGE = 180^\circ (koordenvierhoek) \\ \angle D_1 + \angle AGE = 180^\circ (koordenvierhoek)\end{array}\right\} \Rightarrow \angle D_1 = \angle B_1\end{array}\right\} \Rightarrow \angle C_1 = \angle D_1 \Rightarrow \text{CF // ED (z-hoeken)}$$

b.



CF is niet evenwijdig met DE als b.v. D en E samenvallen of C en F samenvallen.

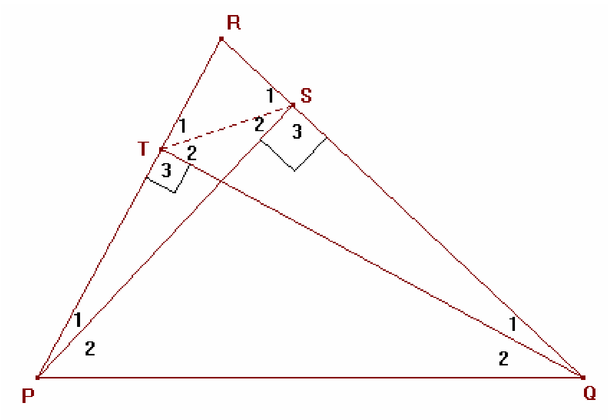
39a.



Gegeven: ∠ A = ∠ CED (DE is antiparallel) en Δ ABC.

Te bew. ABED is een koordenvierhoek.

Bewijs: $\left.\begin{array}{l}\angle CED = \angle A (geg) \\ \angle CED + \angle DEB = 180^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \angle A + \angle DEB = 180^\circ$ $\Rightarrow$ ABDE is een koordenvierhoek b.



Gegeven: Δ PQR met PS $\perp$ QR en QT $\perp$ PR

Te bew. ST is antiparallel met PQ

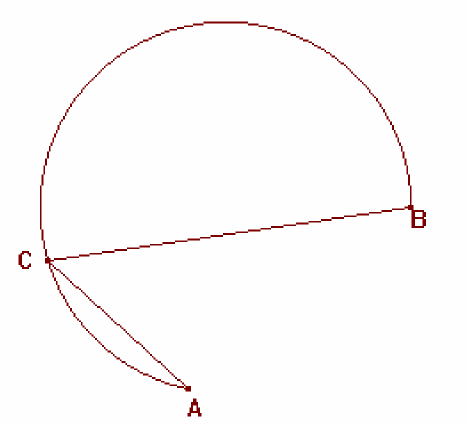
Bewijs: Teken TS $\Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned}\angle T_3 = 90^\circ &\Rightarrow \text{ T ligt op de cirkel met middellijn PQ(Thales)}\\ \angle S_3 = 90^\circ &\Rightarrow \text{ S ligt op de cirkel met middellijn PQ(Thales)}\end{aligned}\right\} \Rightarrow PQST \text{ is een koordenvierhoek}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned}\angle P_{12} + \angle S_{23} &= 180^\circ(\textit{koordenvierhoek})\\ \angle S_1 + \angle S_{23} &= 180^\circ(\textit{gestrekte}\text{ hoek})\end{aligned}\right\} \Rightarrow \angle \mathrm{P}_{12} = \angle \mathrm{S}_1 \Rightarrow \text{ST is antiparallel met PQ}$$

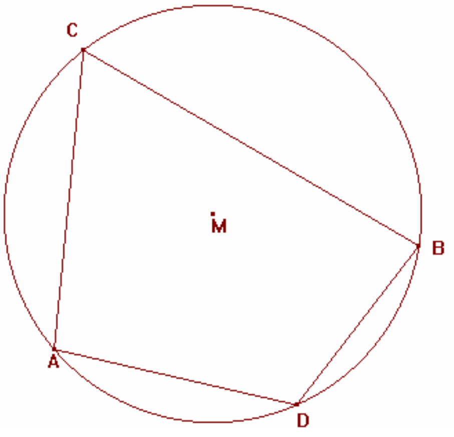
40. De grootte van $\angle$ C blijft steeds hetzelfde.

41a.



Gegeven
De punten A en B op een cirkel en punt C is een willekeurig punt op de cirkelboog AB

Te bew. $\angle$ ACB is constant(onafhankelijk van de plaats van C op de cirkelboog

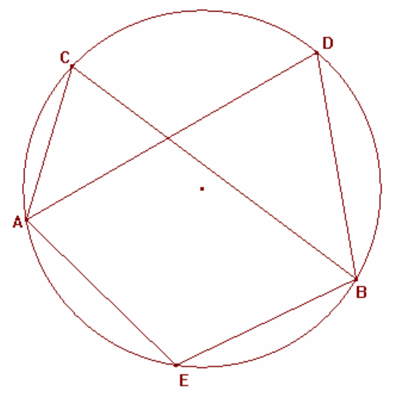


b. Bewijs:
Teken de gehele cirkel en kies een vast punt D gelegen op de andere cirkelboog door A en B. $\Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned}&\angle ACB + \angle ADB = 180^\circ(\textit{koordenvierhoek})\\ &\angle ADB \text{ is een vaste hoek}\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\angle ACB$ is ook een vaste hoek
Dus $\angle$ ACB is onafhankelijk van de plaats van punt C op boog AB.

42a.



Gegeven: C en D liggen aan dezelfde kant van AB en $\angle$ ACB = $\angle$ ADB

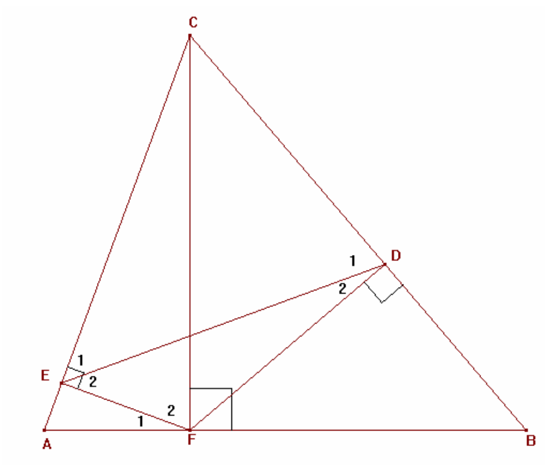
Te bew. C en D liggen op dezelfde cirkelboog AB

Bewijs: Teken een cirkel door A, C en B ,waarbij punt E niet op de cirkelboog van ACB ligt.

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\angle C + \angle E = 180°(koordenvierhoek)\\ \angle C = \angle D\end{array}\right\} \Rightarrow \angle D + \angle E = 180° \Rightarrow$$ vierhoek AEBD is ook een koordenvierhoek $\Rightarrow$ D ligt ook op de cirkel door A , B en E en dus ook op dezelfde cirkelboog als punt C.

b. In vierhoek ABCD liggen de punten C en D aan dezelfde kant van AB. Als geldt dat $\angle$ ACB = $\angle$ ADB dan liggen de punten C en D op dezelfde cirkelboog AB $\Rightarrow$ A,B,C en D liggen dus op dezelfde cirkel $\Rightarrow$ vierhoek ABCD is dus een koordenvierhoek.

43.

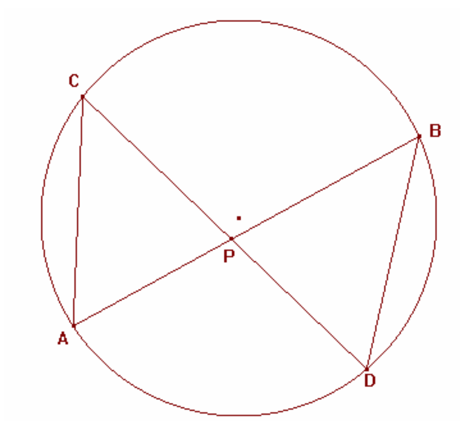


Geg. Δ ABC met CF $\perp$ AB en FE $\perp$ AC ; FD $\perp$ BC

Te bew. ED is antiparallel met AB

Bewijs: Teken lijnstuk DE. $\Rightarrow \angle E_{12} + \angle D_{12} = 90° + 90° = 180° \Rightarrow$ vierhoek EFDC is een koordenvierhoek $\Rightarrow$ EFDC liggen op een cirkel $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l}\angle D_1 = \angle F_2 (zelfde\ boog)\\ \left.\begin{array}{l}\text{In } \Delta\text{AFC geldt: } \angle A = 90° - \angle C\\ \text{In } \Delta\text{FEC geldt : } \angle F_2 = 90° - \angle C\end{array}\right\} \Rightarrow \angle A = \angle F_2\end{array}\right\} \Rightarrow \angle D_1 = \angle A \Rightarrow \text{ED is antiparallel met AB.}$$



44a. Geg. De punten A, B , C en D op een cirkel zodat AB en CD elkaar snijden binnen de cirkel in een punt P.

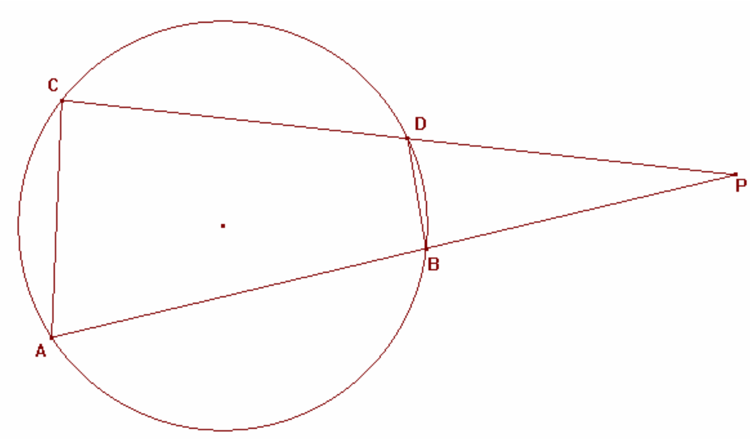
Te bew. AP . BP = CP . DP

Bewijs: Teken AC en BD $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l}\angle CAB = \angle CDB(boog)\\ \angle ACD = \angle ABD(boog)\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta\ APC \sim \Delta\ DPB\ (hh) \Rightarrow \frac{AP}{DP} = \frac{CP}{BP} \Rightarrow AP \cdot BP = DP \cdot CP$$

b.

Geg. A , B , C en D op een cirkel waarbij AB en CD elkaar snijden in P met punt P buiten de cirkel.



Te bew.
AP . BP = CP . DP

Bewijs : Teken weer AC en DB. $\Rightarrow$

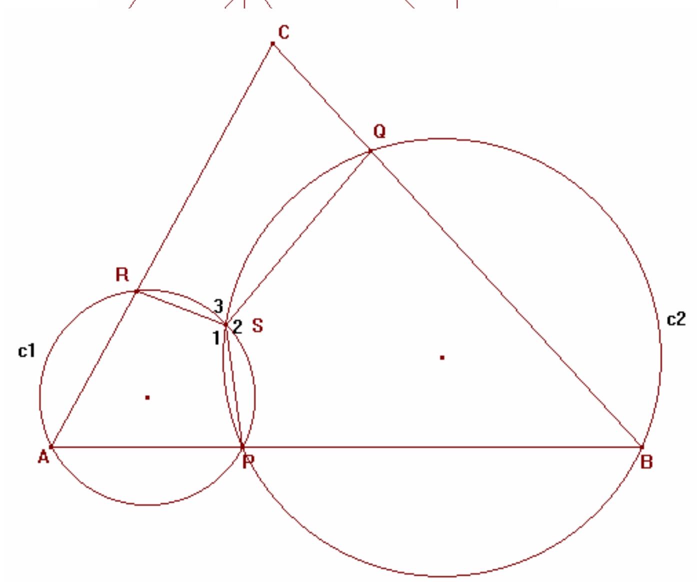
$$\left.\begin{array}{l}\angle CAB + \angle CDB = 180^\circ\\ \angle CDB + \angle BDP = 180^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\angle CAB = \angle BDP\\ \angle P = \angle P\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta\ APC \sim \Delta\ DPB\ (hh) \Rightarrow \frac{AP}{DP} = \frac{CP}{BP} \Rightarrow$$

AP . BP = DP . CP

45.

De drie cirkels gaan vermoedelijk door

één punt.



46.

Gegeven:

Δ ABC met P op AB , Q op BC en R op AC. De cirkels c_1 en c_2 door A, P en R en door P , B en Q en cirkel c_3 door C , Q en R.

Te bew.
De drie cirkels c_1 , c_2 en c_3 gaan door één punt.

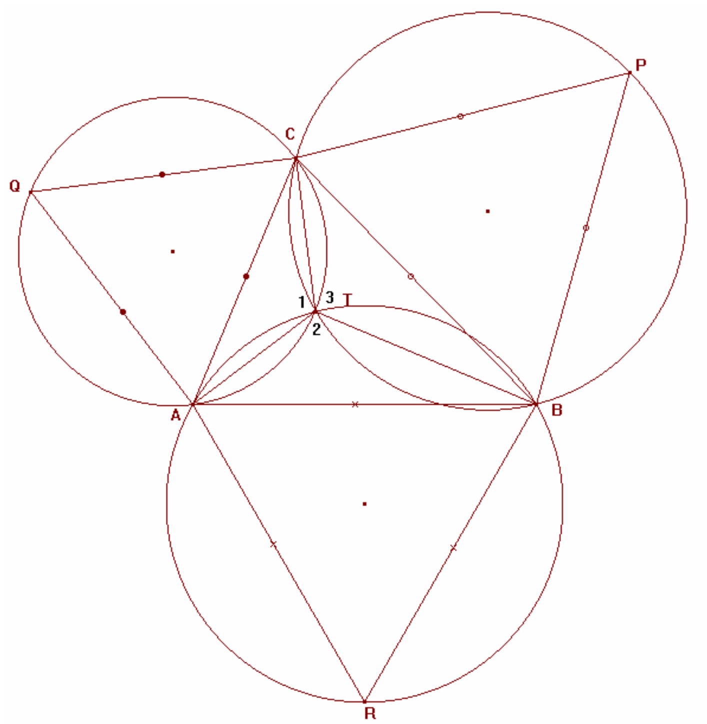
Bewijs: Stel S is een snijpunt van c_1 en c_2. $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l}\angle A+\angle S_1=180°(koordenvierhoek)\\ \angle B+\angle S_2=180°(koordenvierhoek)\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\angle A+\angle B+\angle S_1+\angle S_2=360°\\ \angle S_1+\angle S_2+\angle S_3=360°\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\angle A+\angle B=\angle S_3\\ \angle A+\angle B+\angle C=180°\end{array}\right\}\Rightarrow \angle S_3+\angle C=180°$$ $\Rightarrow$ RSQC is een koordenvierhoek $\Rightarrow$ S ligt op de cirkel door R , C en Q $\Rightarrow$ c_1 , c_2 en c_3 gaan door één punt.

47a,b. Uit Cabri blijkt dat de cirkels vermoedelijk door één punt gaan.

48a.



Gegeven:
Δ ABC met de drie gelijkzijdige driehoeken ABR , BCP en ACQ naar buiten gericht.
De drie omgeschreven cirkels door de drie gelijkzijdige driehoeken.

Te bew.
De drie omgeschreven cirkels gaan door één punt.

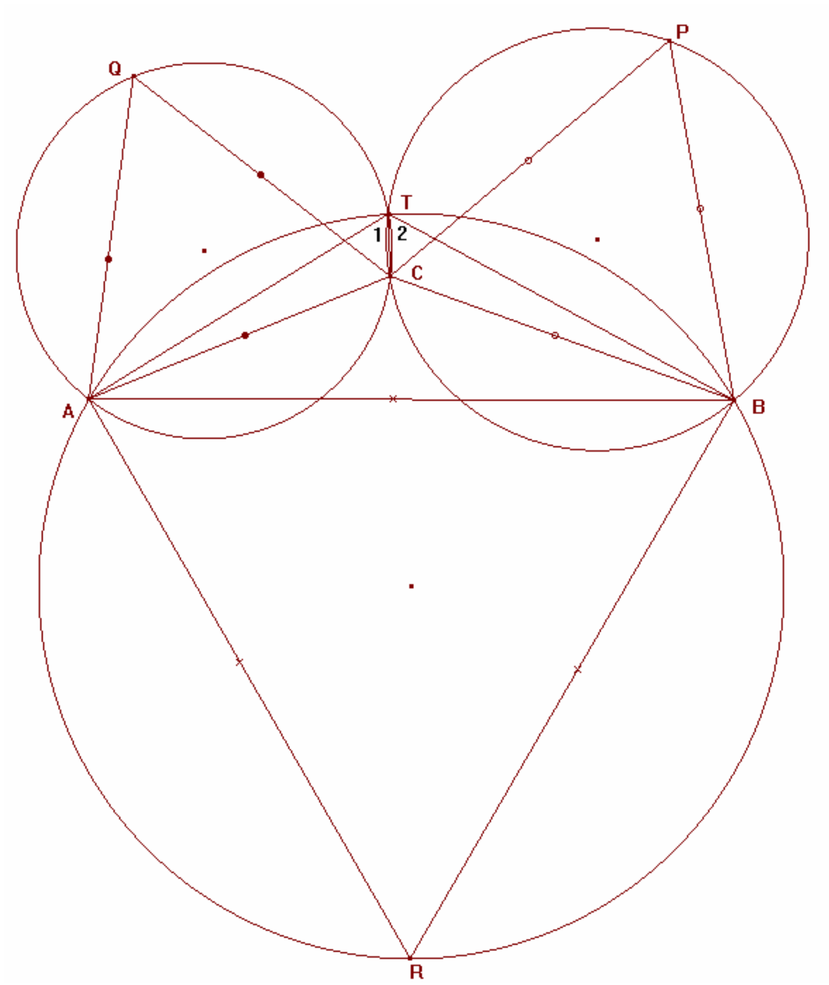
Bewijs: Stel T is een snijpunt van de omgeschreven cirkels van Δ BCP en ΔACQ $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\angle P+\angle T_3=180^\circ(\textit{koordenvierhoek})\\ \angle P=60^\circ(\textit{gelijkzijdige driehoek})\end{array}\right\}\Rightarrow \angle T_3=120^\circ\\ \left.\begin{array}{l}\angle Q+\angle T_1=180^\circ(\textit{koordenvierhoek})\\ \angle Q=60^\circ(\textit{gelijkzijdige driehoek})\end{array}\right\}\Rightarrow \angle T_1=120^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\angle T_{12}=240^\circ\\ \angle T_{123}=360^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \angle T_2=120^\circ\\ \angle R=60^\circ(\textit{gelijkzijdige driehoek})\end{array}\right\}\Rightarrow \angle T_2+\angle R=180^\circ\Rightarrow$$

vierhoek ARBT is een koordenvierhoek $\Rightarrow$ punt T ligt ook op de cirkel door AB en R $\Rightarrow$ de drie cirkels gaan door één punt.

b.



Gegeven:
Δ ABC met ∠ ACB > 120º en weer de drie gelijkzijdige driehoeken ABR , BCP en ACQ naar buiten gericht met de omgeschreven cirkels.

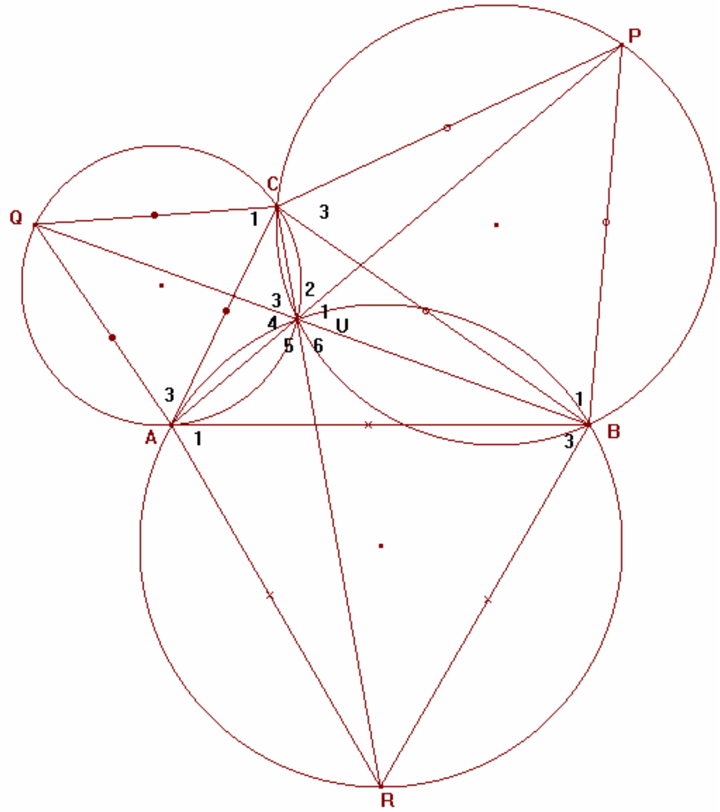
Te bew.
De drie omgeschreven cirkels snijden elkaar in één punt.

Bewijs: Stel de omgeschreven cirkels van BCP en ACQ snijden elkaar in een punt T buiten Δ ABC.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\angle T_1=\angle Q(zelfde\ boog)\\ \angle Q=60^\circ(gelijkzijdige\ driehoek)\end{array}\right\}\Rightarrow\angle T_1=60^\circ\\ \left.\begin{array}{l}\angle T_2=\angle P(zelfde\ boog)\\ \angle P=60^\circ(gelijkzijdige\ driehoek)\end{array}\right\}\Rightarrow\angle T_2=60^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow\angle T_{12}=120^\circ\\ \angle R=60^\circ(gelijkzijdige\ driehoek)\end{array}\right\}\Rightarrow\angle T_{12}+\angle R=180^\circ\Rightarrow$$

vierhoek ATBR is een koordenvierhoek ⇒ punt T ligt ook op de omgeschreven cirkel van Δ ABR ⇒ de drie omgeschreven cirkels gaan door één punt.

49a.



49b.
Het vermoeden is dat de drie lijnstukken door één punt gaan.
Dat punt lijkt te zijn het snijpunt van de drie omgeschreven cirkels van de drie gelijkzijdige driehoeken.

50. Zie tekening bij opgave 49.
Geg. Δ ABC met de drie gelijkzijdige driehoeken naar buiten en de drie omgeschreven cirkels. Verder de lijnstukken AP , BQ en CR

We gaan bewijzen dat deze drie lijnstukken door één punt gaan . Het snijpunt van de drie omgeschreven cirkels.

a. te bew. Δ QBC ≅ Δ APC

$$\text{Bew.}\quad\left.\begin{array}{l}\angle C_1=60^\circ=\angle C_3(gelijkzijdig)\Rightarrow\angle C_{12}=\angle C_{23}\\ QC=AC(gelijkzijdig)\\ BC=CP(gelijkzijdig)\end{array}\right\}\Rightarrow\Delta QBC\cong\Delta APC(zhz)$$

⇒ ∠ QBC = ∠ APC ⇔ ∠ UBC = ∠ UPC ⇒ de punten B en P liggen op dezelfde cirkelboog UC ⇒ de punten U , B , P en C liggen op één cirkel ⇒ UBPC is dus een koordenvierhoek.

b. te bew. AQCU is een koordenvierhoek

Bewijs: Uit de congruentie volgt ook : $\angle$ BQC = $\angle$ PAC $\Leftrightarrow$ $\angle$UQC = $\angle$UAC $\Rightarrow$ de punten A en Q liggen op dezelfde cirkelboog UC $\Rightarrow$ de punten U , A , Q en C liggen op één cirkel $\Rightarrow$ UAQC is dus een koordenvierhoek.

c. te bew. ARBU is ook een koordenvierhoek.

Bewijs:

$$\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}\angle U_{12}+\angle BPC=180^\circ(koordenvierhoek)\\ \angle BPC=60^\circ(gelijkzijdig)\end{array}\right\}\Rightarrow\angle U_{12}=120^\circ\\
\left.\begin{array}{l}\angle U_{34}+\angle AQC=180^\circ(koordenvierhoek)\\ \angle AQC=60^\circ(gelijkzijdig)\end{array}\right\}\Rightarrow\angle U_{34}=120^\circ\\
\angle U_{123456}=360^\circ
\end{array}\right\}\Rightarrow\angle U_{56}=120^\circ\\
\angle ARB=60^\circ
\end{array}\right\}\Rightarrow\angle U_{56}+\angle ARB=180^\circ\Rightarrow$$

vierhoek ARBU is dus ook een koordenvierhoek.

d. $$\left.\begin{array}{l}\angle U_5=\angle B_3(zelfde\ boog)\\ \angle B_3=60^\circ(gelijkzijdig)\end{array}\right\}\Rightarrow\angle U_5=60^\circ$$

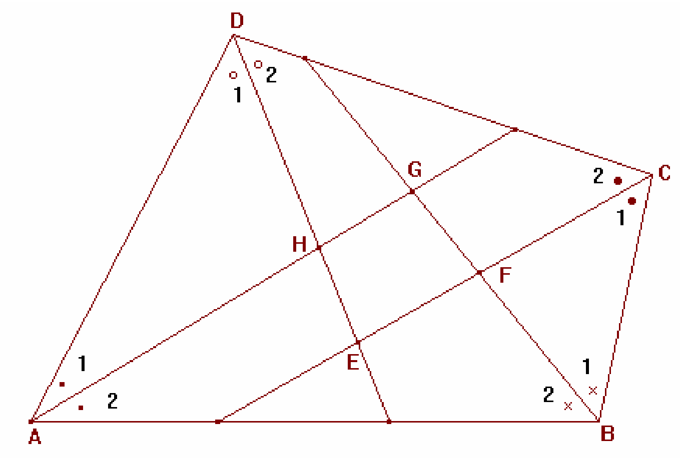
e. $$\left.\begin{array}{l}\angle U_{34}=120^\circ(zie\ onderdeel\ \text{c})\\ \angle U_5=60^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow\angle U_{345}=180^\circ$$ $\Rightarrow$ punt U ligt dus op lijnstuk CR $\Rightarrow$

AP , BQ en CR gaan door één punt U.

f. $$\left.\begin{array}{l}BPCU\text{ is een koordenvierhoek }\Rightarrow U\text{ op cirkel door B,C en P}\\ \text{AQCU is een koordenvierhoek }\Rightarrow U\text{ op cirkel door A , Q en C}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

U is dus het snijpunt van de omgeschreven cirkels $\Rightarrow$ U is dus het punt T uit opgave 48.

51.



Geg.
ABCD met de vier deellijnen van A,B,C en D , die vierhoek EFGH insluiten

Te bew.
EFGH is een koordenvierhoek

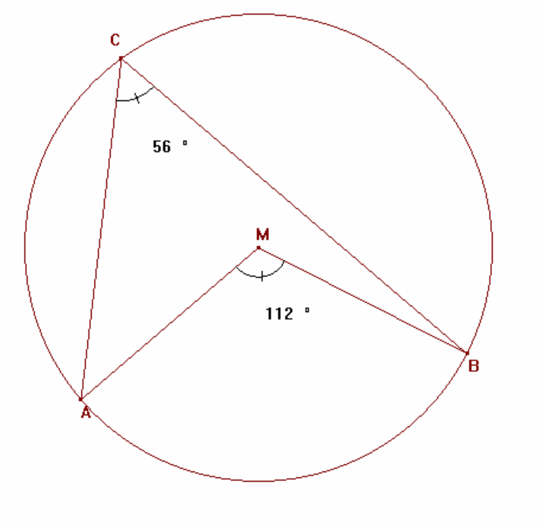
Bewijs:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\angle A_1+\angle D_1+\angle DHA=180^\circ \\ \angle DHA=\angle GHE(overst.h.)\end{array}\right\}\Rightarrow \angle GHE=180^\circ-(\angle A_1+\angle D_1) \\ \left.\begin{array}{l}\angle B_1+\angle C_1+\angle BFC=180^\circ \\ \angle BFC=\angle EFG(overst.h.)\end{array}\right\}\Rightarrow \angle EFG=180^\circ-(\angle B_1+\angle C_1)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\angle GHE+\angle EFG=180^\circ-\angle A_1-\angle D_1+180^\circ-\angle B_1-\angle C_1 \\ \left.\begin{array}{l}\angle A_{12}+\angle B_{12}+\angle C_{12}+\angle D_{12}=360^\circ \\ \angle A_1=\angle A_2 \\ \angle B_1=\angle B_2 \\ \angle C_1=\angle C_2 \\ \angle D_1=\angle D_2\end{array}\right\}\Rightarrow \angle A_1+\angle B_1+\angle C_1+\angle D_1=180^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \angle GHE+\angle EFG=180^\circ \Rightarrow$$

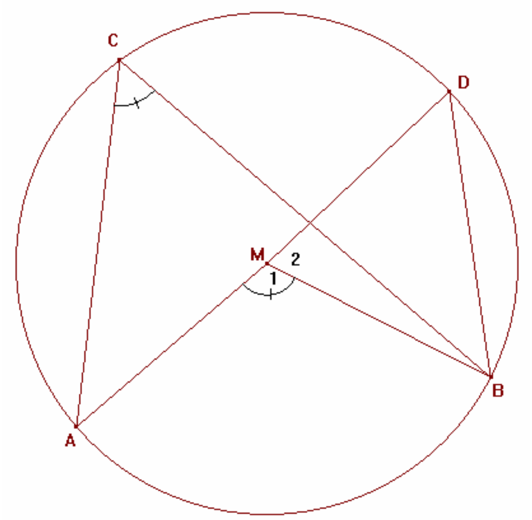
$\Rightarrow$ vierhoek EFGH is een koordenvierhoek.

52a,b



52c. Vermoeden:
$\angle$ ACB = 0,5 . $\angle$ AMB

53.



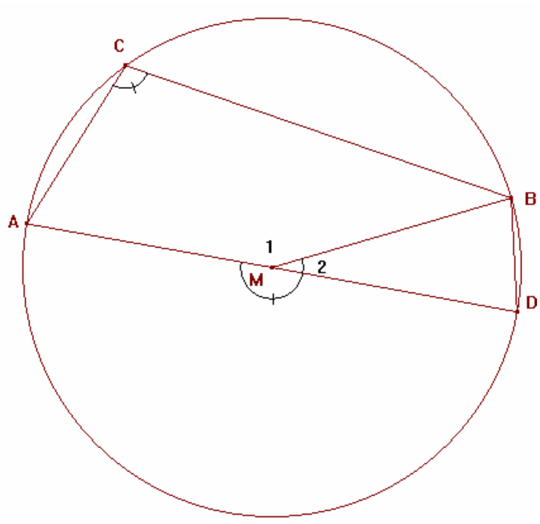
Gegeven : cirkel met middelpunt M en de punten A, B en C op de cirkel.
Verder geldt dat M en C aan dezelfde kant van AB liggen.

Te bew. $\angle$ ACB = 0,5 . $\angle$ AMB

Bewijs: Verleng AM tot middellijn AD.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\angle C=\angle D(zelfde\ boog)\\ \angle D=\angle B(gelijkbenig)\\ \angle M_2+\angle D+\angle B=180^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \angle M_2+2.\angle C=180^\circ\\ \angle M_1+\angle M_2=180^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow 2.\angle C=\angle M_1\Rightarrow \angle ACB=\tfrac{1}{2}.\angle AMB$$

53b.



Gegeven : cirkel met middelpunt M en de punten A, B en C op de cirkel.
Verder geldt dat M en C niet aan dezelfde kant van AB liggen.

Te bew. ∠ ACB = 0,5 . ∠ AMB

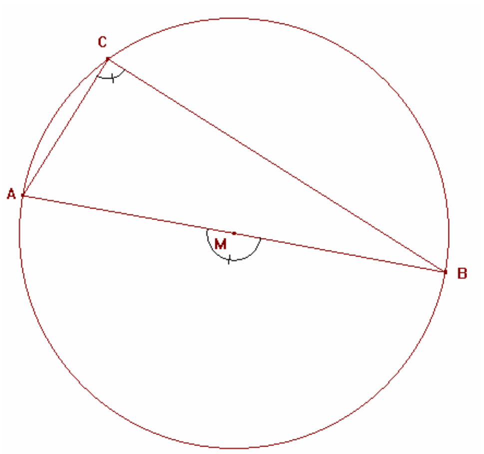
Bewijs: Verleng AM ⇒ middellijn AD.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\angle D=180^\circ-\angle C(koordenvierhoek)\\ \angle MBD=\angle D(gelijkbenig)\\ \angle M_2+\angle D+\angle MBD=180^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \angle M_2+2.(180^\circ-\angle C)=180^\circ\\ \angle AMB(grote\ boog)=180^\circ+\angle M_2\Rightarrow \angle M_2=\angle AMB-180^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\angle AMB-180^\circ\ +360^\circ-2.\angle C=180^\circ\Leftrightarrow \angle AMB=2.\angle C$$

⇒ ∠ACB = 0,5 . ∠AMB

53c.

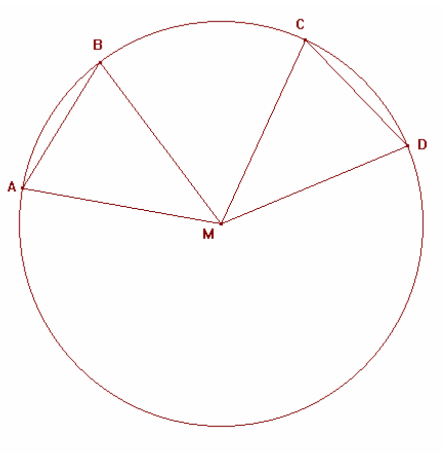


Gegeven :
Cirkel met middellijn AB en C op de cirkel

Te bew. ∠ ACB = 0,5 . ∠ AMB

Bewijs: $\left.\begin{array}{l}\angle AMB=180^\circ(gestrekte\ hoek)\\ \angle ACB=90^\circ(Thales)\end{array}\right\}\Rightarrow \angle ACB=0,5.\angle AMB$

54.

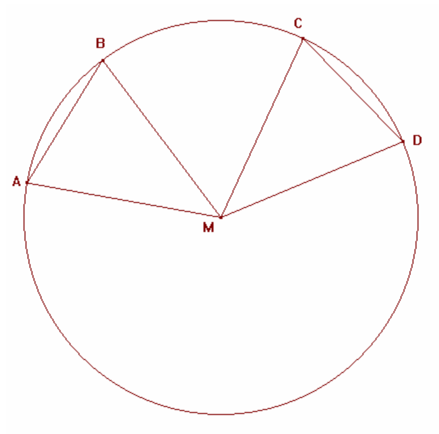


Gegeven : cirkel met middelpunt M.
bg (AB) = bg (CD)

Te bew. AB = CD

Bewijs: $\left.\begin{array}{l} bg(AB) = bg(CD) \Rightarrow \angle AMB = \angle CMD \\ AM = CM\,(straal) \\ BM = DM\,(straal) \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta AMB \cong \Delta CMD(zhz) \Rightarrow AB = CD$

55.

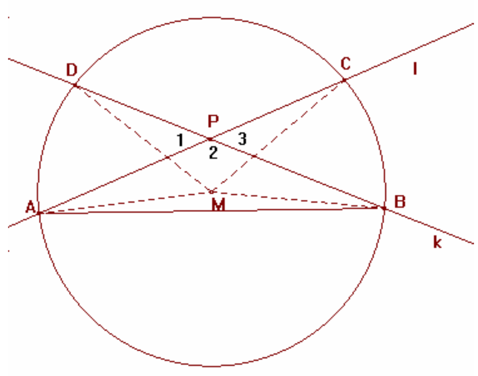


Gegeven:
Cirkel met middelpunt M en de koorden AB en CD zijn gelijk .

Te bew. bg(AB) = bg(CD)

Bewijs:
$\left.\begin{array}{l} AB = CD(geg) \\ AM = CM\,(straal) \\ BM = DM\,(straal) \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta AMB \cong \Delta CMD(zzz) \Rightarrow \angle AMB = \angle CMD \Rightarrow bg(AB) = bg(CD)$

56.



Gegeven :
Cirkel met middelpunt M .
Lijn l snijdt de cirkel in A en C en lijn k snijdt de cirkel in B en D . Snijpunt P binnen de cirkel

Te bew. ∠ APB = 0,5.(∠AMB + ∠ CMD)

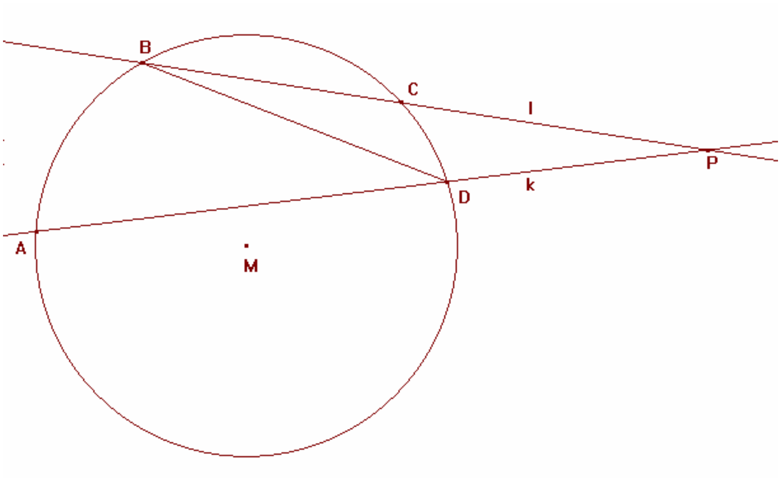
Bewijs:

$$\left.\begin{aligned}&\angle P_2+\angle BAP+\angle PBA=180^\circ\\&\angle BAP=\angle BAC=\tfrac{1}{2}.\angle BMC(omtrekshoek)\\&\angle ABP=\angle ABD=\tfrac{1}{2}.\angle AMD(omtrekshoek)\end{aligned}\right\}\Rightarrow \angle P_2+\tfrac{1}{2}.\angle BMC+\tfrac{1}{2}.\angle AMD=180^\circ\Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned}&\Rightarrow \angle P_2+\tfrac{1}{2}.(\angle BMC+\angle AMD)=180^\circ\\&\angle AMB+\angle BMC+\angle CMD+\angle DMA=360^\circ\Rightarrow \tfrac{1}{2}(\angle AMB+\angle CMD)+\tfrac{1}{2}.(\angle BMC+\angle AMD)=180^\circ\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$\angle P_2 = \angle APB = \tfrac{1}{2}.(\angle AMB+\angle CMD)$

56b.



Gegeven :
Cirkel met middelpunt M .
Lijn l snijdt de cirkel in B en C en lijn k snijdt de cirkel in A en D . Snijpunt P buiten de cirkel

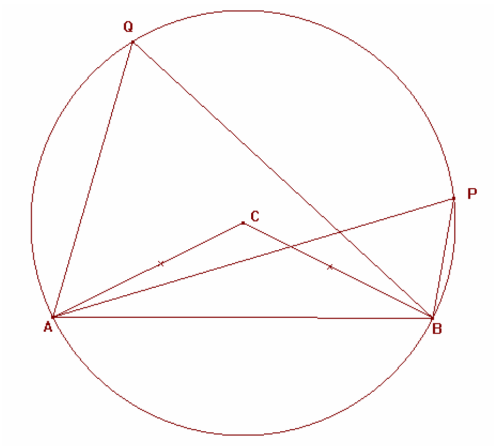
Te bew.
$\angle$ APB =
0,5.($\angle$AMB - $\angle$ CMD)

Bewijs: Teken lijnstuk BD.

$$\left.\begin{aligned}&\left.\begin{aligned}&\angle DBP+\angle DPB+\angle PDB=180^\circ\\&\angle ADB+\angle PDB=180^\circ(gestrekteh.)\end{aligned}\right\}\Rightarrow \angle ADB=\angle DBP+\angle DPB\\&\angle ADB=\tfrac{1}{2}.\angle AMB(omtrekshoek)\\&\angle DBP=\angle DBC=\tfrac{1}{2}.\angle DMC(omtrekshoek)\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow \tfrac{1}{2}.\angle AMB=\tfrac{1}{2}.\angle DMC$ $+\angle$DPB $\Leftrightarrow$ $\angle$DPB = $\tfrac{1}{2}.(\angle AMB-\angle CMD)$

57.



Gegeven:
Δ ABC met AC = BC . Punt P zodat
$\angle$APB = 0,5.$\angle$ACB en P ligt aan dezelfde kant van AB als C.

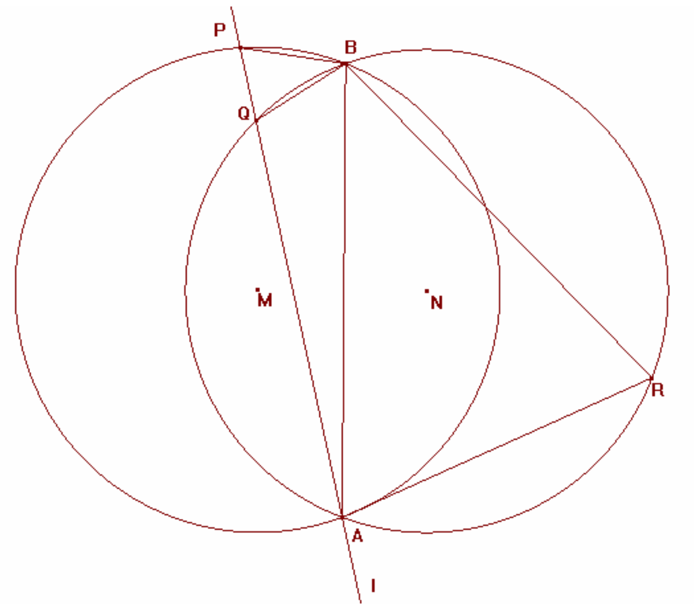
Te bew. BC = CP

Bewijs: Teken de cirkel met middelpunt C door A en dus ook door B. Neem vervolgens een punt Q op deze cirkel gelegen boven AB. $\Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} &\angle AQB = \tfrac{1}{2}.\angle ACB(omtrekshoek) \\ &\angle APB = \tfrac{1}{2}.\angle ACB(gegeven) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \angle AQB = \angle APB \Rightarrow \text{ de punten P en Q liggen op dezelfde}$$

cirkelboog AB $\Rightarrow$ P ligt dus ook op dezelfde cirkel $\Rightarrow$ BC = CP

58.



Gegeven:
Twee cirkels met gelijke straal en snijpunten A en B. Lijn l snijdt de cirkels in P , Q en A.

Te bew.
Δ BPQ is gelijkbenig

Bewijs: Teken de lijnstukken PB , BQ en neem een punt R rechts van AB op de cirkel met middelpunt N . Neem voor de cirkel links het middelpunt M. Teken nog BR en AR.

$$\left.\begin{aligned} &MB = BN(zelfde\ straal) \\ &AB = AB \\ &MA = NA(zelfde\ straal) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta MAB \cong \Delta NAB(zzz) \Rightarrow \angle AMB = \angle ANB \ (1)$$

$$\left.\begin{aligned} &\left.\begin{aligned} &\angle QPB = \angle APB = \tfrac{1}{2}.\angle AMB(omtrekshoek) \\ &\angle ANB = \angle AMB(1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \angle QPB = \tfrac{1}{2}.\angle ANB \\ &\left.\begin{aligned} &\angle AQB + \angle ARB = 180^{\circ}(koordenvierhoek) \\ &\angle AQB + \angle BQP = 180^{\circ}(gestrekte\ hoek) \\ &\angle ARB = \tfrac{1}{2}.\angle ANB(omtrekshoek) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \angle BQP = \tfrac{1}{2}.\angle ANB \end{aligned}\right\} \Rightarrow \angle QPB = \angle BQB \Rightarrow$$

$QB = PB \Rightarrow \Delta\ BPQ$ is gelijkbenig.